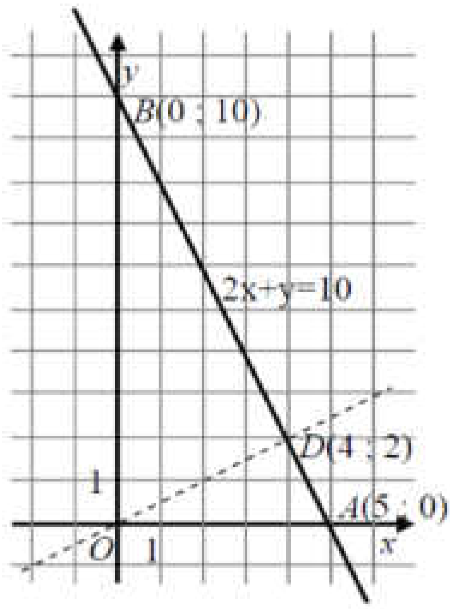
Koordinátageometria
Megoldások

1)

a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? (6 pont)

b) Jelölje *e* azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x + y = b$, ahol *b* valós paraméter. Mekkora lehet *b* értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott *e* egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek? (8 pont)

Megoldás:



a) A megadott $2x + y = 10$ egyenletű egyenes az $A(5;0)$ és $B(0;10)$ pontokban metszi a tengelyeket (1 pont)

Az origóból az egyenesre bocsátott, rá merőleges egyenes egyenlete $x - 2y = 0$ (1 pont)

A két egyenes D metszéspontjának koordinátái: $D(4;2)$ (1 pont)

A megadott feltételeknek **három derékszögű háromszög felel meg**

AOB háromszög, ahol $A(5;0), O(0;0), B(0;10)$

ADO háromszög, ahol $A(5;0), D(4,2), O(0;0)$

BDO háromszög, ahol $B(0;10), D(4,2), O(0;0)$ (3 pont)

b) Az egyenesnek és a körnek akkor és csak akkor van közös pontja, ha az egyenleteikből álló egyenletrendszernek van megoldása (1 pont)

A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 16$ (1 pont)

Az egyenes egyenletéből $y = b - 2x$.

Behelyettesítés után: $x^2 + (b - 2x)^2 = 16$ (1 pont)

$5x^2 - 4bx + b^2 - 16 = 0$ (1 pont)

A kapott másodfokú egyenletnek van megoldása, ha a D diszkrimináns nem negatív (1 pont)

$D = 320 - 4b^2 \geq 0$ (1 pont)

ahonnan $|b| \leq 4\sqrt{5}$ (1 pont)

A b paraméter lehetséges értékei tehát a $\left[\mathbf{-4\sqrt{5};4\sqrt{5}}\right]$ elemei (1 pont)

Összesen: 14 pont

2) A *PQRS* négyszög csúcsai: $P(3;-1)$, $Q(1;3)$, $R(-6;2)$ és $S(-5;-5)$.

Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen * jelet a táblázat megfelelő mezőibe. Válaszát indokolja, támassza alá számításokkal!

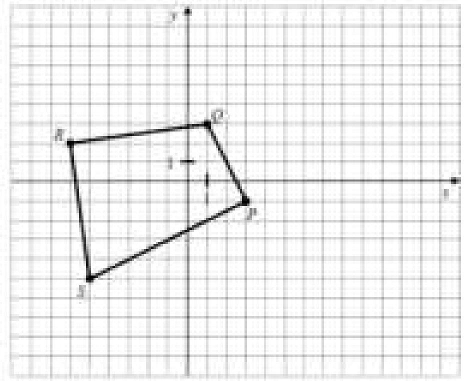
a) A állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs derékszöge. (4 pont)

b) B állítás: A *PQRS* négyszög húrnégyszög. (4 pont)

c) C állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs szimmetriacentruma. (5 pont)

Megoldás:

	Igaz	Hamis
A		*
B	*	
C	*	



a) Az A állítás **hamis** (1 pont)
mert van derékszöge. Például *SRQ* szög (1 pont)
mert $\overrightarrow{RQ}(7;1)$ és $\overrightarrow{RS}(1;-7)$ (1 pont)
és így $\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{RS}=0$, így a négyszög *R*-nél lévő szöge derékszög (1 pont)

b) A B állítás **igaz** (1 pont)
mert a *PQRS* négyszögben az *R* csúccsal szemközti *P* csúcsnál lévő szög is derékszög. (1 pont)
ugyanis $\overrightarrow{PQ}(-2;4)$ és $\overrightarrow{PS}(-8;-4)$, ezért $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=0$ (1 pont)
Így a *PQRS* négyszög szemközti szögeinek összege 180° (a húrnégyszög tételének megfordítása miatt), tehát a négyszög húrnégyszög (1 pont)

c) A C állítás **igaz** (1 pont)
mert ha lenne a négyszögnek szimmetriacentruma, akkor a *PQRS* négyszög paralelogramma lenne. Ehhez például az kellene, hogy az $\overrightarrow{RQ}(7;1)$ és a $\overrightarrow{PS}(-8;-4)$ vektorok ellentett vektorok legyenek. (2 pont)
Ez csak úgy teljesülne, ha az egyik oldalvektor koordinátái (-1)-szeresei a másik vektor koordinátáinak. Ez viszont nem teljesül. (2 pont)

Összesen: 13 pont

3) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer *S* síkjában. Az *A* halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $4x-3y\geq 18$, azaz $A:=\{P(x;y)\in S \mid 4x-3y\geq 18\}$;

a *B* halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0$,

azaz $B:=\{P(x;y)\in S \mid x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0\}$,

a *C* halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2=4$, azaz $C:=\{P(x;y\in S) \mid y^2=4\}$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az *A*, a *B* és a *C* halmaz pontjai! (8 pont)

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B\setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)

c) Ábrázolja a $B\cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb, illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)

Megoldás:

a) Az A halmaz pontjai a $y = \frac{4}{3}x - 6$ egyenletű egyenes alatti **zárt félsík** pontjai (1 pont)

Az A halmaz ábrája (1 pont)

A B halmaz pontja az $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ egyenletű **kör** és a kör belső pontjai (1 pont)

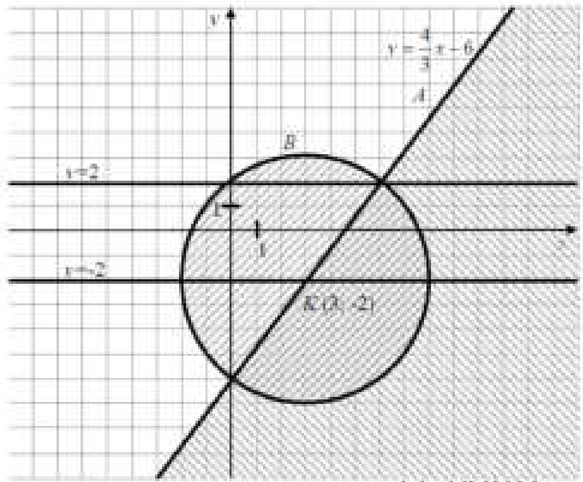
A kör középpontja $K(3;-2)$, sugara $r = 5$

(1 pont)

A B halmaz ábrája (2 pont)

A C halmaz pontjai az $y = 2$ és $y = -2$ egyenletű **párhuzamos egyenesek** pontjai (1 pont)

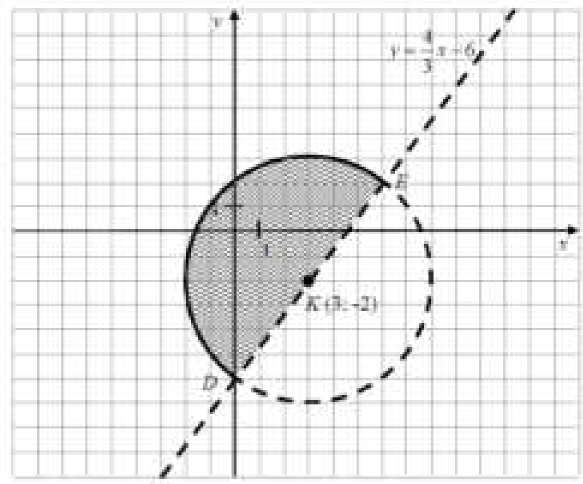
A C halmaz ábrája (1 pont)



b) A $B \setminus A$ halmaz ábrázolása: (1 pont)

A $B \setminus A$ halmaz pontjai egy félkörlemez pontjai, amihez a félkörív és a belső pontok hozzá tartoznak, de a kör DE átmérője nem. (Az átmérő végpontjai $D(0;-6)$ és $E(6;2)$.) (2 pont)

A ponthalmaz pontjai a *DE* átmérő fölött vannak. (1 pont)



c) A $B \cap C$ halmaz a B ponthalmaz határoló körének két párhuzamos húrja;

A húrok végpontjai: $(0;2)$ és $(6;2)$, valamint $(-2;-2)$ és $(8;-2)$.

(ez utóbbi húr egyben átmérő is)

A $B \cap C$ halmaz ábrázolása: (1 pont)

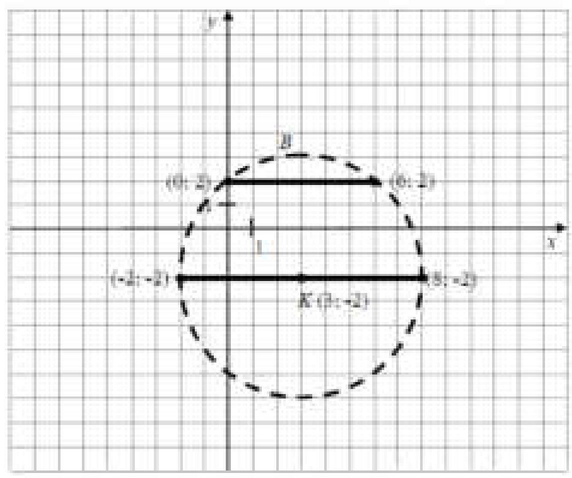
Az origótól a **legmesszebb** a $\mathbf{(8;-2)}$ pont

(1 pont)

legközelebb a $\mathbf{(0;2)}$ és a $\mathbf{(0;-2)}$ pont van

(2 pont)

Összesen: 16 pont



4)

a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendeléssel megadott függvényt

(3 pont)

b) Adja meg a $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét. (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények - Analízis 35. feladat*

b) A parabola egy adott pontjába húzott érintő meredekségét itt az első derivált segítségével kaphatjuk meg. $y' = 2x - 8$ (5 pont)

Az érintési pont első koordinátájának behelyettesítésével: $y'(5) = 2 = m$ (2 pont)

$y = mx + b \quad P(5;-4)$

$-4 = 10 + b$ (2 pont)

$b = -14$

Az érintő egyenlete: $\mathbf{y = 2x - 14}$ (2 pont)

Összesen: 14 pont

5) Egy háromszög két oldalegyenese az x tengely és az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlö szárú és

a) az alaplapja az x tengelyre illeszkedik (7 pont)

b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei! (9 pont)

Megoldás:

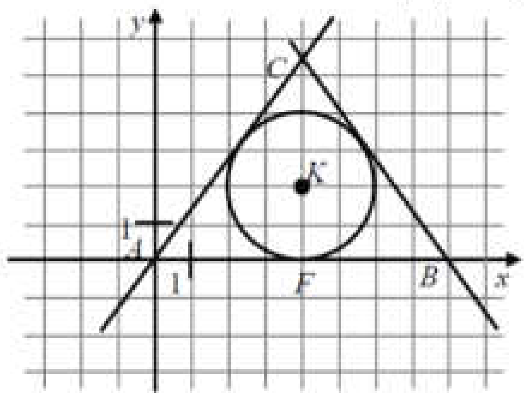
a) A keresett háromszög egyik csúcsa a koordinátarendszer origója, a háromszög beírt körének középpontja $K(4;2)$ (1 pont)

Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye áthalad ezen a középponton (1 pont)

Ha az ABC háromszög alapjának egyenese az x tengely, akkor a szimmetriatengelyének egyenlete $x = 4$ (1 pont)

Mivel $A(0;0)$ és AB oldalél F felezöpontja $(4;0)$, ezért $B(8;0)$ (1 pont)

A C csúcs az AC oldalegyenes $\left(y = \frac{4}{3}x\right)$ és a szimmetriatengely $(x = 4)$ metszéspontja $C\left(4;\frac{16}{3}\right)$ (1 pont)



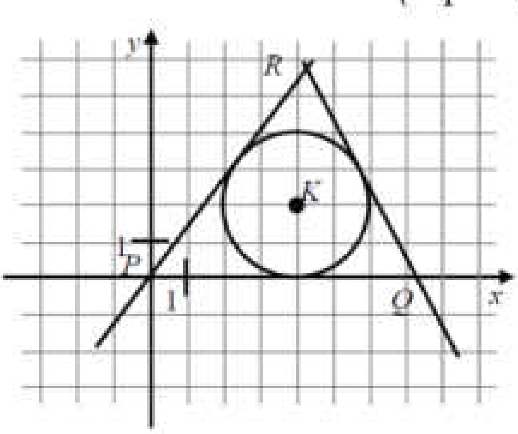
A BC oldalegyenes egy irányvektora $\overrightarrow{BC}\left(-4;\frac{16}{3}\right)$ (1 pont)

Így a BC oldalegyenes egyenlete $\mathbf{4x + 3y = 32}$ (1 pont)

b) Ha $P(0;0)$ és a PQR háromszög alapjának egyenese a QR egyenes, akkor a $\overrightarrow{PK}$ a QR egyenes egy normálvektora. $\overrightarrow{PK} = (4;2)$. A QR egyenes egyenlete $2x + y = c$, ahol c valós (1 pont)

A megadott kör akkor lesz a QPR háromszög beírt köre, ha a QR egyenes érinti a kört. Vagyis a körnek és az egyenesnek egy közös pontja van. Tehát az a c felelhet meg, amelyre az alábbi egyenletrendszernek egyetlen gyöke van:

$$\left.\begin{aligned} &2x + y = c \\ &(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{aligned}\right\}$$



Az első egyenletből y-t kifejezve, a másodikba behelyettesítve és rendezve kapjuk, hogy: $5x^2-4cx+c^2-4c+16=0$ (3 pont)

Egyetlen gyököt pontosan akkor kapunk, ha a diszkrimináns nulla, vagyis $D=-4c^2+80c-320=0$ (1 pont)

Ebből $c_1=10+\sqrt{20}$, $\quad c_2=10-\sqrt{20}$ (1 pont)

A c_2 értéke nem felel meg, mert ekkor a kör a háromszög kívülről érintő köre lenne (1 pont)

A keresett QP egyenes egyenlete: $\mathbf{2x+y=10+\sqrt{20}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Adott a $K(t)=t^2+6t+5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x)+K(y)\le 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3;3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? (9 pont)

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+6x+5$$

b) Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét! (7 pont)

Megoldás:

a) $K(x)+K(y)=x^2+6x+5+y^2+6y+5\le 0$ (1 pont)

A bal oldali kifejezés teljes négyzetté kiegészítéssel a következő alakra hozható: $(x+3)^2+(y+3)^2\le 8$ (1 pont)

a H halmaz a $(-3;3)$ középpontú (1 pont)

$\sqrt{8}$ sugarú zárt körlap (1 pont)

A kérdéses valószínűség a geometriai modell alapján a két koncentrikus körlap területének arányaként számolható (2 pont)

A kedvező tartomány a $C(-3;3)$ középpontú, 2 egység sugarú zárt körlap, ennek területe 4π (1 pont)

A teljes tartomány a H halmaz, ennek területe 8π (1 pont)

Így a keresett valószínűség $P=\frac{4\pi}{8\pi}=\mathbf{\frac{1}{2}}$ (1 pont)

b) *Lásd: Függvények - Analízis 8. feladat*

Összesen: 16 pont

7) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében: $\underline{a}(\cos t;\sin t)$ és $\underline{b}(\sin^2 t;\cos^2 t)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

Megoldás:

a) $\underline{\boldsymbol{a}}\left(\cos\frac{5\pi}{6};\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{\boldsymbol{a}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

$\underline{\boldsymbol{b}}\left(\sin^2\frac{5\pi}{6};\cos^2\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{\boldsymbol{b}}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ (1 pont)

b) Jelöljük a két vektor által bezárt szöget α-val. A koordinátáival adott vektorok skaláris szorzata kétféleképpen is kiszámítható: $\underline{\boldsymbol{ab}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$ (1 pont)

illetve $\underline{\boldsymbol{ab}}=|\underline{\boldsymbol{a}}||\underline{\boldsymbol{b}}|\cos\alpha$ (1 pont)

Mivel $|\underline{\boldsymbol{a}}|=1$ és $|\underline{\boldsymbol{b}}|=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ (1 pont)

Ezért $\frac{\sqrt{10}}{4}\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$, ebből $\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\approx 0,2005$ (1 pont)

Innen $\alpha\approx 78,43°$. **Tehát a két vektor ebben az esetben kb. 78°-os szöget zár be.** (1 pont)

c) A két vektor akkor és csak akkor merőlege egymásra, ha $ab=0$ (1 pont)

A keresett t ismeretlent a szokásosabb módon x jelöli. Mivel $\underline{\boldsymbol{ab}}=\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x$, így a $\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x=0$ egyenlet megoldása a feladat. Azonos átalakítással adódik:

$\cos x\sin x(\sin x+\cos x)=0$ (1 pont)

Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha

$\cos x=0$ vagy $\sin x=0$ vagy $\sin x+\cos x=0$ (1 pont)

(1) $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, ahol $n\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)

(2) $x=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)

(3) $\sin x+\cos x=0$

A (3) alatti egyenletnek nem megoldásai azok az x számok, amelyek koszinusza 0, így az egyenlet megoldáshalmaza azonos a $\operatorname{tg}x=-1$ egyenletével (1 pont)

Azaz $x=\frac{3\pi}{4}+m\pi$, ahol $m\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

A két vektor tehát pontosan akkor merőleges egymásra, ha $\boldsymbol{t=n\cdot\frac{\pi}{2}}$ vagy $\boldsymbol{t=\frac{3\pi}{4}+m\pi}$, ahol $\boldsymbol{n,m\in\mathbb{Z}}$

Összesen: 14 pont

8) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (*A*, *B*) illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az *A* és a *B* pont koordinátáit! (6 pont)

b) Írja fel az *ABC* háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja *D*. Határozza meg a *D* pont koordinátáit! (4 pont)

c) Mekkora területű részekre bontja az *ABC* háromszöget a parabola íve? (6 pont)

Megoldás:

a) A keresett két csúcs rajta van a *C* középpontú $\sqrt{53}$ egység sugarú körön. A kör egyenlete: $x^2+(y-7)^2=53$ (1 pont)

A keresett pontokat a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x^2+1 \\ x^2+(y-7)^2=53 \end{array}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenlet átalakításával: $x^2=-4y+4$. Az x^2 kifejezést behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy: $y^2-18y=0$ (1 pont)

Innen $y_1=0$ és $y_2=18$. (1 pont)

Ezek közül csak az $y_1=0$ ad megoldást (1 pont)

Behelyettesítve az első egyenletbe: $x^2=4$. Innen $x_1=-2$ és $x_2=2$

A keresett két pont: $\boldsymbol{A(-2;0)}$ és $\boldsymbol{B(2;0)}$ (1 pont)

b) A *BC* egyenes egyenlete: $\boldsymbol{7x+2y=14}$ (1 pont)

A *D* pont koordinátáit a $7x+2y=14$ és a $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ görbék *B*-től különböző metszéspontjai adják. (1 pont)

$7x-\frac{1}{2}x^2=12$ gyökei $x_1=2$ és $x_2=12$ (1 pont)

$\boldsymbol{D(12;-35)}$ (1 pont)

(A másik száregyenes egyenlete: $\boldsymbol{AC: 7x-2y=-14}$, közös pont pedig $\boldsymbol{D(-12;-35)}$.)

c) *Lásd: Függvények - Analízis 9. feladat*

Összesen: 16 pont

9) Az *ABCD* konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$\boldsymbol{DA: 3x-4y-20=0}$ $\boldsymbol{AB: 3x+5y-20=0}$

$\boldsymbol{BC: 4x-3y+12=0}$ $\boldsymbol{CD: 5x+3y+15=0}$

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az *x* és az *y* tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

Megoldás:

a)

az egyenes	x tengelyen lévő pontja	y tengelyen lévő pontja
$DA: 3x-4y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;-5)$
$AB: 3x+5y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;4)$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(-3;0)$	$(0;4)$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(-3;0)$	$(0;-5)$

A DA és az AB egyenesek metszéspontja az x tengely $A=\left(\frac{20}{3};0\right)$ pontja

(1 pont)

Az AB és a BC egyenesek metszéspontja az y tengely $B=(0;4)$ pontja

(1 pont)

A BC és a CD egyenesek metszéspontja az x tengely $C=(-3;0)$ pontja

(1 pont)

A CD és a DA egyenesek metszéspontja az y tengely $D=(0;-5)$ pontja

(1 pont)

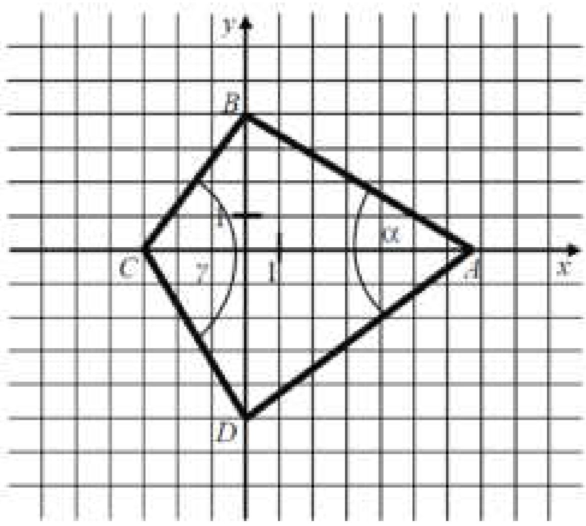
A csúcspontok alapján beláttuk, hogy az *ABCD* négyszög *AC* átlója az *x*, a *BD* átlója pedig az *y* tengelyre illeszkedik (1 pont)

Felírjuk az oldalegyeneseket és egy-egy normálvektorukat (2 pont)

az egyenes	egy normálvektor
$DA: 3x-4y-20=0$	$(3;-4)$
$AB: 3x+5y-20=0$	$(3;5)$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(4;-3)$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(5;3)$

A normálvektorok között és ezért az egyenesek közt sincs két egymásra merőleges (skalárszorzatuk nem 0), ezért az *ABCD* négyszögnek nincs derékszöge (1 pont)

b) Legyen $\gamma = BCD\sphericalangle$ és $\alpha = DAB\sphericalangle$



Vektorok skalárszorzatával fogjuk kiszámítani két szemközti szög koszinuszát. $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}$ (1 pont)

ahol $\overrightarrow{CB}=(3;4)$ és $\overrightarrow{CD}=(3;-5)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=-11$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=5$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{34}$

(1 pont)

$\cos\gamma = -\frac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}$, ahol $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{20}{3};4\right)$ és $\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{20}{3};-5\right)$ (1 pont)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{220}{9}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{\sqrt{544}}{3}$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\frac{25}{3}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \frac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

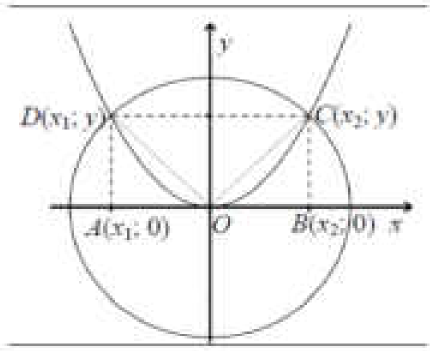
A γ és az α szögek tehát kiegészítő szögek, az *ABCD* négyszög húrnégyszög. (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) Az $x^2=2y$ egyenletű parabola az $x^2+y^2\le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét! (16 pont)

Megoldás:

Az $x^2+y^2=8$ egyenletű kör középpontja és a parabola tengelypontja is az origó (O) (2 pont)



A metszéspontok meghatározása:

$$\left.\begin{array}{l}2y=x^2\\ x^2+y^2=8\end{array}\right\}$$

$y^2+2y-8=0$ (3 pont)

$y_1=2 \quad y_2=-4$

amelyek közül az $y=2$ a feladatnak megfelelő (1 pont)

A CD húr a körlapból egy olyan körszeletet vág le, amelynek a középponti szöge $\frac{\pi}{2}(=90°)$, mert (1 pont)

az OD és OC is egy-egy négyzet átlója (1 pont)

így a területe: $T_{\text{körszelet}}=\frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha)=$
$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\pi-4$ (2 pont)

A parabolából a CD húr által levágott parabolaszelet területe:

$$T_{\text{parabolaszelet}}=T_{ABCD}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{2}dx=4\cdot 2-\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}=$$

$$=8-\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2}=8-\left[\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]=\frac{16}{3}$$ (5 pont)

A konvex rész területe:

$T=T_{\text{körszelet}}+T_{\text{parabolaszelet}}=2\pi-4+\frac{16}{3}=\mathbf{2\pi+\frac{4}{3}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

11) Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2+y^2+6x+4y-3=0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1;-2)$.

a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon! (11 pont)

b) Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) Teljes négyzetté alakítással és rendezéssel a kör egyenlete:
$(x+3)^2+(y+2)^2=16$ (1 pont)

innen a kör középpontja $K(-3;-2)$, sugara $r=4$ (1 pont)

A kör K középpontja az ABC szabályos háromszög súlypontja. (1 pont)

Az AK szakasz a háromszög AF súlyvonalának kétharmada (1 pont)

ahonnan $F(-5;-2)$. (1 pont)

A szabályos háromszög AF súlyvonala egyben oldalfelező merőleges is (1 pont) így a BC oldalegyenes az AF súlyvonalra F-ben állított merőleges egyenes (1 pont)

A BC egyenes egyenlete tehát $x=-5$ (1 pont)

A kör egyenletébe behelyettesítve: $y_1=2\sqrt{3}-2$ és $y_2=-2\sqrt{3}-2$ (2 pont)

A szabályos háromszög másik két csúcsa: $\boldsymbol{B\left(-5;2\sqrt{3}-2\right)}$ és $\boldsymbol{C\left(-5;-2\sqrt{3}-2\right)}$ (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 52. feladat*

12) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2;5)$ pontra, valamint az $x+y=4$ és $x+y=6$ egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3. (16 pont)

Megoldás:

A feltételek és az adatok alapján a keresett egyenes nem lehet párhuzamos az y tengellyel, ezért egyenletét kereshetjük az $y=mx+b$ alakban (1 pont)

Mivel a $P(2;5)$ pont illeszkedik az egyenesre, ezért $5=2m+b$ (1 pont)

ahonnan $b=5-2m$ és az így keresett egyenes egyenlete $y=mx+5-2m$ (1 pont)

Az adott egyenletű egyenesek és a keresett egyenes metszéspontjának első koordinátáját a megfelelő egyenletekből álló paraméteres egyenletrendszerekből határozhatjuk meg. (1 pont)

$$\begin{aligned} x+y&=4 \\ y&=mx+5-2m \end{aligned}$$ (1 pont)

y-t az első egyenletbe behelyettesítve és rendezve: $(m+1)x=2m-1$ (1 pont)

Mivel $m=-1$ esetén a két adott egyenessel párhuzamos egyenest kapunk, ezért $m\neq-1$ (1 pont)

és $x_1=\dfrac{2m-1}{m+1}$ (1 pont)

Az $\left.\begin{aligned} x+y&=6 \\ y&=mx+5-2m \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerből az előzőhöz hasonló módon kapjuk,

hogy $x_2=\dfrac{2m+1}{m+1}$ (1 pont)

A feltétel szerint $x_1-x_2=3$ (1 pont)

vagy $x_2-x_1=3$ (1 pont)

Az első esetben $m_1=-\dfrac{5}{3}$ (1 pont)

a második esetben $m_2=-\dfrac{1}{3}$ (1 pont)

A kapott értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy $b_1=\dfrac{25}{3}$, illetve $b_2=\dfrac{17}{3}$ (1 pont)

A feltételeknek eleget tevő egyenesnek egyenlete:

$\boldsymbol{y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{25}{3} \quad (5x+3y=25)}$ (1 pont)

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{17}{3} \quad (x+3y=17)}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2;6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját *P*, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig *Q*. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az *OPQ* háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki a területét (*O* a koordináta-rendszer origóját jelöli)! (16 pont)

Megoldás:

Mivel a $(2;6)$ pont rajta van az egyenesen, ezért $6 = 2a + b$ és $b = 6 - 2a$

(1 pont)

Ezzel az egyenes egyenlete: $y = ax + 6 - 2a$ (1 pont)

Ez az egyenest a $P\left(2 - \frac{6}{a};0\right)$ pontban, (1 pont)

az y tengelyt a $Q(0;6-2a)$ pontban metszi (1 pont)

Mivel $a < 0$, ezért $2 - \frac{6}{a}$ és 6-2a is pozitív (1 pont)

A levágott háromszög területe: $T(a) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{6}{a}\right)(6 - 2a)$ (1 pont)

Ebből: $T(a) = 12 - 2a - \frac{18}{a}$ (1 pont)

Ennek a minimuma ott van, ahol $a \mapsto T(a)\ (a < 0)$ függvény deriváltja nulla

(1 pont)

$T'(a) = -2 + \frac{18}{a^2}$ (2 pont)

ez 0, ha $a = 3$ vagy $a = -3$ (1 pont)

Mivel $a < 0$, ezért $a = -3$ (1 pont)

Ez valóban minimumhely, mert $T''(-3) > 0$ (1 pont)

Ha $a = -3$, akkor $b = 12$ (1 pont)

A keresett egyenes egyenlete: $\boldsymbol{y = -3x + 12}$ (1 pont)

A legkisebb terület **24 egység**. (1 pont)

Összesen: 16 pont

14) Az *ABC* háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$AB: \ y = 0$

$BC: \ x + 10y = 20$

$CA: \ y = \frac{1}{2}x - 4$

a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit! (7 pont)

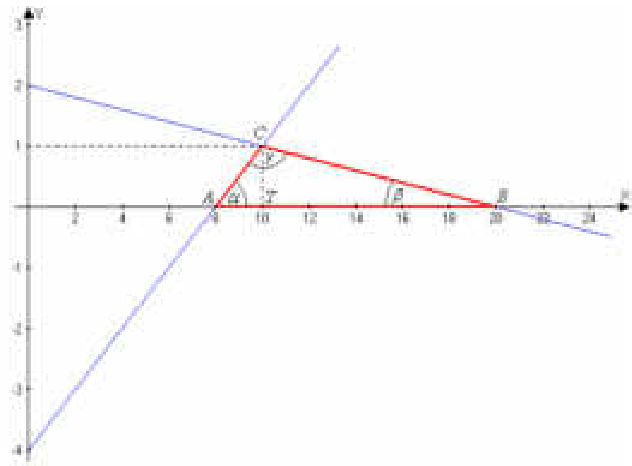
b) Számítsa ki a háromszög *B* csúcsnál lévő belső szögét! (4 pont)

Megoldás:

a) Az $y=0$ egyenest, vagyis az x tengelyt $x+10y=20$ egyenes a $\boldsymbol{B(20;0)}$ pontban (2 pont)

az $y=\frac{1}{2}x-4$ egyenes az $\boldsymbol{A(8;0)}$ pontban metszi (2 pont)

Az $x+10y=20$ és $y=\frac{1}{2}x-4$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $x=10$ és $y=1$ (2 pont)



ezért a háromszög harmadik csúcsa $\boldsymbol{C(10;1)}$ (1 pont)

b) Legyen a C-ből húzott magasság talppontja T. A CTB derékszögű háromszögből $\text{tg}\beta=0{,}1$ (3 pont)

Így $\boldsymbol{\beta\approx 5{,}71°}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

15) Egy háromszög két csúcsa $A(8;2)$; $B(-1;5)$ a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$

a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit! (3 pont)

b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit! (8 pont)

Megoldás:

a) Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a köré írt kör középpontja (1 pont)

A köré írt kör egyenlete $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ (1 pont)

Ebből az oldalfelező merőlegesek középpontja $\boldsymbol{O(3;2)}$ (1 pont)

b) A C pont illeszkedik az y tengelyre, ezért, ha c jelöli a C pont második koordinátáját, akkor $C(0;c)$. (1 pont)

C illeszkedik a körre, ezért $(-3)^2+(c-2)^2=25$, tehát $(c-2)^2=16$ (1 pont)

Ebből $c_1=6; c_2=-2$, azaz a C csúcsra két lehetőség van: $C_1(0;6), C_2(0;-2)$ (2 pont)

Az ABC_1 háromszög súlypontja: $S_1\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5+6}{3}\right)=\boldsymbol{S_1\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)}$ (2 pont)

Az ABC_2 háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5-2}{3}\right)=\boldsymbol{S_2\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)}$ (2 pont)

Összesen: 11 pont

16) Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a;\lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\ \lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra!

(3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a = \frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögü koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve B pontok halmazát! (6 pont)

Megoldás:

a) Mivel $\lg ab = \lg a + \lg b$, és $\lg \frac{b}{a} = \lg b - \lg a$, így $B(\lg a + \lg b; \lg b - \lg a)$ (1 pont)

Bizonyítandó tehát, hogy $\lg a < \lg a + \lg b$ és $\lg b < \lg b - \lg a$ (1 pont)

rendezés után kapjuk, hogy $\lg b > 0$ és $\lg a > 0$.

A feltételek szerint $0 < a < 1$, illetve $1 < b$, és a tízes alapú logaritmus függvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, valamint $\lg 1 = 0$, **tehát mindkét egyenlőtlenség igaz.** (1 pont)

b) $\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{BA}(-\lg b; \lg a)$ (1 pont)

Mivel az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektorok skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összege, vagyis

$\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = -\lg a \cdot \lg b + \lg b \cdot \lg a = 0$, **tehát a két vektor merőleges egymásra** (2 pont)

c) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ egyike sem nullvektor. Mivel

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{\lg^2 a + \lg^2 b} = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right|$ (2 pont)

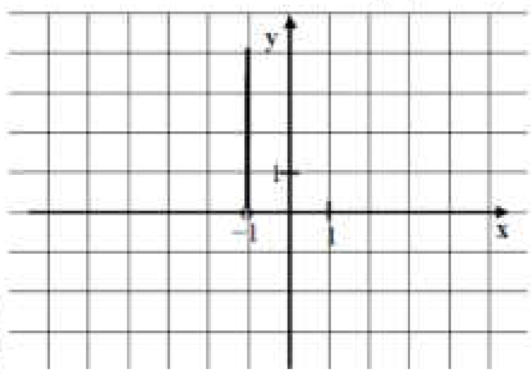
tehát az OAB háromszög egyenlő szárú és derékszögű, (1 pont)

így $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)\sphericalangle = \mathbf{45°}$ (1 pont)

d) $A(-1; \lg b)$ (1 pont)

A tízes alapú logaritmus függvény szigorú növő, folytonos, felülről korlátos függvény, így $\lg b$ tetszőleges pozitív értéket felvehet.

Ezért az A pontok halmaza azon nyílt kezdőpontú félegyenes, amelynek $(x;y)$ koordinátái kielégítik az $x = -1$ egyenletet és az $0 < y$ egyenlőtlenséget. (1 pont)

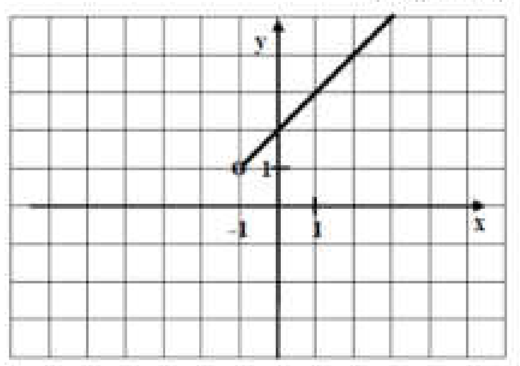


$B(\lg b - 1; \lg b + 1)$ (1 pont)

A B pont második koordinátája 2-vel nagyobb az első koordinátájánál $(\lg b + 1 = (\lg b - 1) + 2)$ (1 pont)

$\lg b - 1$ tetszőleges, (-1)-nél nagyobb szám lehet, így $\lg b + 1$ tetszőleges 1-nél nagyobb értéket vesz föl. (1 pont)

Így a B pontok halmaza azon nyílt kezdőpontú félegyenes, amelynek $(x;y)$ koordinátái kielégítik az $y = x + 2$ egyenletet és az $-1 < x$ egyenlőtlenséget. (1 pont)



Összesen: 16 pont

17) **A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.**

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! **(7 pont)**

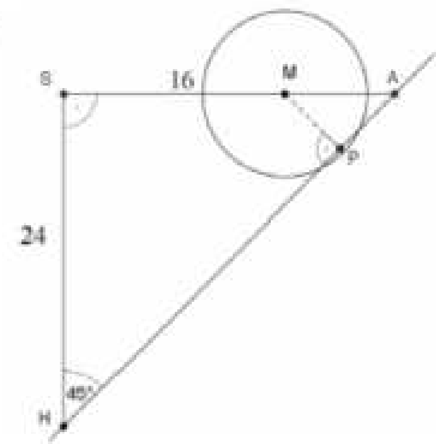
Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra.

A sziget az *S*, a mentőcsónakot az *M*, a tengerjáró hajót a *H* pont jelöli. A hajó útjának és az *SM* egyenesnek a metszéspontját jelölje *A*. (2 pont)



A *HSA* háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért

$AS = 24$ km (1 pont)

$MA = 8$ km (1 pont)

Valamint az *APM* háromszög derékszögű és van 45°-os szöge (1 pont)

Ezért $MP = 4\sqrt{2}\,(\approx 5{,}7)$ (1 pont)

Mivel $MP < 6$ km, ezért a hajó legénysége észlelheti a jelzéseket. (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 15. feladat*

Összesen: 14 pont

18) **A derékszögű koordináta-rendszerben az *ABC* háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;p)$. Határozza meg a *p* paraméter pontos értékét, ha a háromszög *B* csúcsánál levő belső szöge 60°-os.** **(16 pont)**

Megoldás:

Az *ABC* háromszög *AC* oldalára felírva a koszinusztételt:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot 0{,}5$ (2 pont)

$AB^2 = 50$ (1 pont)

$BC^2 = 16 + (p+4)^2$ (1 pont)

$p^2 + 8p + 32$ (1 pont)

$AC^2 = 81 + (p-1)^2$ (1 pont)

$p^2 - 2p + 82$ (1 pont)

A kapott értékeket visszahelyettesítve a koszinusztételbe a következőt kapjuk:

$p^2 - 2p + 82 = p^2 + 8p + 32 - \sqrt{50}\cdot\sqrt{p^2 + 8p + 21}$ (1 pont)

Rendezve: $\sqrt{50\left(p^2 + 8p + 32\right)} = 10p$ (2 pont)

Mivel a baloldalon pozitív szám áll ezért $p > 0$ (1 pont)

Négyzetre emelve és egyszerűsítve:

$p^2 + 8p + 32 = 2p^2$ (1 pont)

Amiből adódik $p^2 - 8p - 32 = 0$ (1 pont)

Ennek az egyenletnek a gyökei:

$p_1 = 4 + 4\sqrt{3} \quad p_2 = 4 - 4\sqrt{3}$ (2 pont)

Mivel $p > 0$, ezért csak a $\boldsymbol{p_1 = 4 + 4\sqrt{3}}$ megoldás lesz jó. (1 pont)

Összesen: 16 pont

19) Az *ABCD* húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x-3)2 + (y-2)2 = 100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x - y = 4$. A trapéz *AB* alapjának egy belső pontja $P(-5;1)$, *BC* szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit! (16 pont)

Megoldás:

A trapéz alapjának egy normálvektora az $\overline{n}(1;2)$ vektor (1 pont)

A $P(-5;1)$ ponton áthaladó *AB* alap egyenlete $x + 2y = -3$ (1 pont)

Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait tehát a trapéz két csúcsának koordinátáit az

$$\left.\begin{array}{l}(x-3)^2 + (y-2)^2 = 100 \\ x + 2y = -3\end{array}\right\}$$ egyenletrendszer megoldásai alkotják (2 pont)

Az $x = -2y - 3$ kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az $y^2 + 4y - 12 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. (1 pont)

Jelölje a trapéz köré írt kör középpontját *K*.

Mivel a kör sugara 10 egység, a trapéz szárai pedig $10\sqrt{2}$ egység hosszúak, az *AKD* és a *CKB* háromszögek derékszögűek. (2 pont)

Ezért $KA(-10;0)$ vektor 90°-os elforgatottja a *KD* vektor, a $KB(6;-8)$ vektor 90°-os elforgatottja pedig a *KC* vektor. (1 pont)

Ezért vagy $KD(0;10)$ vagy $KD(0;-10)$ (2 pont)

Azaz vagy $D(3;12)$, vagy $D(3;-8)$ (1 pont)

A $(3;-8)$ pont a trapéz szimmetriatengelyének *A*-val ellentétes oldalán van, így a jó megoldás $\boldsymbol{D(3;12)}$ (1 pont)

Hasonlóan vagy $KC(8;6)$, vagy $KC(-8;-6)$ (2 pont)

Azaz $C(11;8)$, vagy $C(-5;-4)$ (1 pont)

A $(-5;-4)$ pont a trapéz szimmetriatengelyének B-vel ellentétes oldalán van, így tehát $\boldsymbol{C(11;8)}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

20) **Egy $ABCD$ négyzet A csúcsa a koordinátarendszer y tengelyére, szomszédos B csúcsa pedig a koordinátarendszer x tengelyére illeszkedik.**

a) Bizonyítsa be, hogy a négyzet K középpontjának koordinátái vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei! (8 pont)

b) Egy ilyen négyzet középpontja a $(7;7)$ pont. A négyzet oldala 10 egység hosszú. Számítsa ki a négyzet koordinátatengelyekre illeszkedő két csúcsának koordinátáit! (8 pont)

Megoldás:

a) Legyen $A(0;a)$ és $B(b;0)$ (de $a^2+b^2 \neq 0$). (1 pont)

Ekkor az AB szakasz felezőpontja $F\left(\frac{b}{2};\frac{a}{2}\right)$. (1 pont)

Ebből adódóan $FB\left(\frac{b}{2};-\frac{a}{2}\right)$. (1 pont)

Ha a négyzet középpontja a K pont, akkor FK az FB $+90^\circ$-os vagy -90°-os elforgatottja. (1 pont)

Tehát $FK\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ vagy $FB\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$. (1 pont)

Az F pont helyvektorát jelölje $\overline{f}$, ekkor a K pont helyvektora $\overline{k}=\overline{f}+FK$, azaz $\overline{k}\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$ vagy $\overline{k}\left(\frac{b-a}{2};\frac{a-b}{2}\right)$. (2 pont)

Tehát a K középpont koordinátái valóban vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei. (1 pont)

b) A négyzet körülírt körének sugara az átló fele, azaz $5\sqrt{2}$. (1 pont)

A körülírt kör egyenlete: $(x-7)^2+(y-7)^2=50$. (1 pont)

A kör y tengelyen lévő pontjait $x=0$ helyettesítéssel, az x tengelyen lévő pontjait az $y=0$ helyettesítéssel adódó egyenlet adja meg. (1 pont)

A kapott két egyenlet így:

$(y-7)^2=1$, illetve $(x-7)^2=1$. (1 pont)

Ezeknek a megoldásai:

$y_1=6$ és $y_2=8$, illetve $x_1=6$ és $x_2=8$. (1 pont)

Tehát a tengelyeken négy pont lehet a négyzet valamelyik csúcsa:

$(0;6)$, $(0;8)$, $(6;0)$, $(8;0)$. (1 pont)

Figyelembe véve, hogy két szomszédos csúcs távolsága 10 egység két megoldás adódik: $\boldsymbol{A_1(0;6)}$, $\boldsymbol{B_1(8;0)}$, illetve $\boldsymbol{A_2(0;8)}$, $\boldsymbol{B_2(6;0)}$. (2 pont)

Összesen: 16 pont

21) **Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16;10)$, $B(2;4)$, $C(10;2)$.**

a) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő belső szögét! (6 pont)

K pont egyenlő távolságra van A-tól, B-től, és C-től.

b) Határozza meg K pont koordinátáit! (8 pont)

Megoldás:

a) $|AB| = \sqrt{324+36} = \sqrt{360}$

$|AC| = \sqrt{676+64} = \sqrt{740}$

$|BC| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ (2 pont)

Koszinusztétellel: $740 = 360 + 68 - 2 \cdot \sqrt{360} \cdot \sqrt{68} \cdot \cos\beta$ (2 pont)

$\cos\beta = \dfrac{-312}{2 \cdot \sqrt{360} \cdot \sqrt{68}} \approx -0{,}9971$ (1 pont)

$\boldsymbol{\beta \approx 175{,}6^\circ}$ (1 pont)

b) Az ABC háromszög két (tetszőlegesen választott) oldalfelező merőlegesének metszéspontját kell megkeresnünk (ez a háromszög körülírt körének középpontja). (1 pont)

$F_{AB}(-7; 7)$ és $\underline{n}_{f_{AB}} = \overrightarrow{AB}(18; -6)$. (1 pont)

Az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $3x - y = -28$. (1 pont)

$F_{BC}(6; 3)$ és $\underline{n}_{f_{BC}} = \overrightarrow{BC}(8; -2)$. (1 pont)

A BC szakasz felezőmerőlegesének egyenlete: $4x - y = 21$. (1 pont)

A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása: $x = 49$ és $y = 175$. (2 pont)

Tehát $\boldsymbol{K(49; 175)}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

22) Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzolóprogram segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0; 0)$, $B(30; 0)$, $C(30; 48)$; $D(0; 48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.

a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét! (3 pont)

A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $x^2 + y^2 - 36x - 48y + 819 = 0$ alakban adja meg.

b) Számítsa ki, hány százaléka a dísztér területe a park területének! (4 pont)

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18; 24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.

c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát! (5 pont)

Megoldás:

a) A kör középpontja (a téglalap átlóinak felezőpontja): $K(15; 24)$. (1 pont)

A kör sugara $KA = \sqrt{15^2 + 24^2} = \sqrt{801} (\approx 28{,}3)$. (1 pont)

A kör egyenlete így $\boldsymbol{(x-15)^2 + (y-24)^2 = 801}$. (1 pont)

b) A díszteret alkotó kör egyenletét átalakítva:

$(x-18)^2+(y-24)^2=81(=9^2)$ (1 pont)

A kör sugara 9 egység, területe $9^2\pi(\approx 254{,}5)$ területegység. (1 pont)

A park területe $30\cdot 48(=1440)$ területegység. (1 pont)

A dísztér területe ennek kb. $\left(\frac{9^2\pi}{30\cdot 48}\cdot 100\approx\right)$ **17,7 százaléka**. (1 pont)

c) A sétaút egyenesének (egyik) normálvektora $\underline{n}(2;-1)$. (1 pont)

Az egyenes egyenlete $2x-y=12$. (1 pont)

(Az egyenletbe $y=0$-t helyettesítve kapjuk, hogy) a sétaút egyenese a park határának AB oldalegyenesét az $M(6;0)$ pontban metszi. (1 pont)

A sétaút parkbeli szakaszának hossza

$CM=\sqrt{24^2+48^2}=\sqrt{2880}\approx 53{,}7$ egység, (1 pont)

ami a valóságban **537 méter**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

23) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-12x+27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét! (5 pont)

b) Írja fel a parabolához az $E(5;-8)$ pontjába húzott érintő egyenletét! (5 pont)

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények - Analízis 34. feladat*

b) Az E-ben húzott érintő meredekségét az f deriváltfüggvényének az $x=5$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg. (1 pont)

$f'(x)=2x-12$ (1 pont)

$f'(5)=-2$ (1 pont)

Az érintő egyenlete: $\boldsymbol{y+8=-2(x-5)}$. (2 pont)

c) A parabola $y=x^2-12x+27$ alakú egyenletét $y=(x-6)^2-9$ alakban írva adódik, hogy (1 pont)

a tengelypontja $T(6;-9)$, (1 pont)

paramétere $p=0{,}5$. (1 pont)

(Mivel $\frac{p}{2}=0{,}25$, ezért) a fókuszpont: $\boldsymbol{F(6;-8{,}75)}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

24) Adott az $x^2+y^2+4x-16y+34=0$ egyenletű k kör.

a) Igazolja, hogy az $E(-7;\ 5)$ pont rajta van a k körön! (2 pont)

b) Írja fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét! (5 pont)

c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y=mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja! (9 pont)

Megoldás:

a) Az E koordinátáit a kör egyenletébe helyettesítve:

$(-7)^2+5^2+4\cdot(-7)-16\cdot5+34=0$. (1 pont)

A bal oldal értéke $(49+25-28-80+34)=0$, **ezért E valóban rajta van a k körön.** (1 pont)

b) A kör egyenletét átalakítva: $(x+2)^2+(x-8)^2=34$, (1 pont)

ahonnan a k kör középpontja $C(-2;8)$ (sugara pedig $\sqrt{34}$ egység). (1 pont)

Az érintőegyenes egy normálvektora $\underline{n}(-2;8)$. (1 pont)

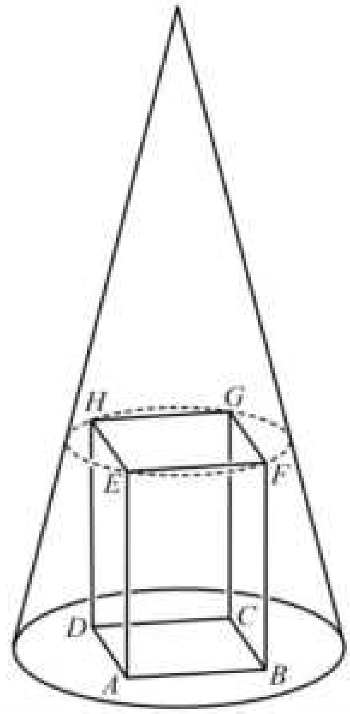
Az érintőegyenes egyenlete $\mathbf{5x+3y=-20}$. (2 pont)

c) *Lásd: Paraméter 10. feladat*

Összesen: 16 pont

25) Az *ABCDEFGH* négyzetes oszlop *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élei merőlegesek az *ABCD* alaplapra. Az *A* csúcsból kiinduló három él hossza $AB=AD=8$ egység, $AE=15$ egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok skaláris szorzatát! **(3 pont)**



A négyzetes oszlop köré egy *P* csúcspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az *A*, *B*, *C*, *D* csúcsok a kúp alaplapjára, az *E*, *F*, *G*, *H* csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.

b) Számítsa ki a kúp felszínét! **(7 pont)**

c) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.) **(6 pont)**

Megoldás:

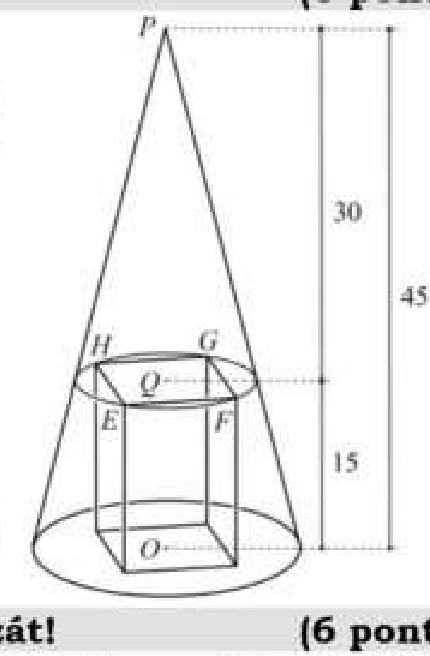
a) Az EF egyenes merőleges az $AEHD$ síkra (mert merőleges két metsző egyenesére, ezért merőleges a sík minden egyenesére), (1 pont)

ezért az EF és AH egyenesek, így az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok is merőlegesek. (1 pont)

Tehát $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AH}=\mathbf{0}$. (1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 30. feladat*

c) *Lásd: Síkgeometria 34. feladat*



26) Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$.

a) Határozza meg a háromszög oldalainak a hosszát! **(6 pont)**

Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6;0)$, $B(6;0)$, és $C(0;8)$.

b) Igazolja, hogy a $3x-4y=-12$ egyenletű *e* egyenes felezi az *ABC* háromszög kerületét és területét is! **(10 pont)**

Megoldás:

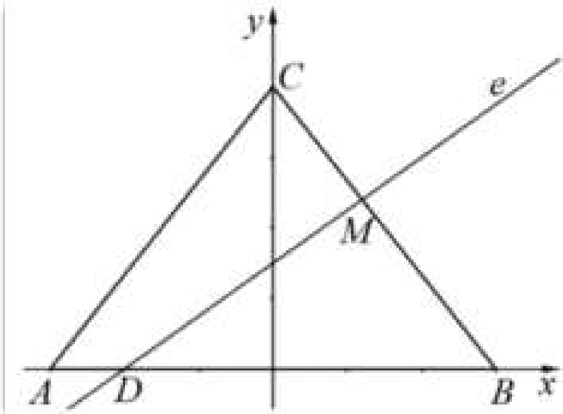
a) *Lásd: Síkgeometria 36. feladat*

b) Az e egyenes az x tengelyt a $D(-4;0)$ pontban, az y tengelyt pedig a $(0;3)$ pontban metszi. (1 pont)

Keressük a BC és az e egyenes M metszéspontját.

A BC egyenes egy normálvektora $(4;3)$ (1 pont)

egyenlete $4x+3y=24$. (1 pont)



A BC és az e egyenes M metszéspontját a

$$\left.\begin{array}{l}\text{I. } 4x+3y=24\\ \text{II. } 3x-4y=-12\end{array}\right\}$$ egyenletrendszer megoldása adja.

Az első egyenlet 4-szeresének és a második egyenlet 3-szorosának összegét véve: $25x=60$. (1 pont)

$x=2,4$ és $y=4,8$ tehát $M(2,4;4,8)$. (1 pont)

A DBM háromszög területe: $\frac{10\cdot4,8}{2}=24$. (1 pont)

Mivel az ABC háromszög területe $\frac{12\cdot8}{2}=48$,

az ***e*** **valóban felezi az** ***ABC*** **háromszög területét.** (1 pont)

A Pitagorasz-tételből $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$,

az ABC háromszög kerülete ezért $2\cdot10+12=32$. (1 pont)

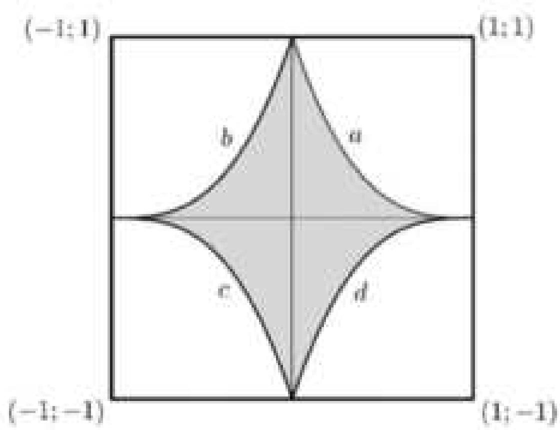
$BM=\sqrt{3,6^2+4,8^2}=6$, $DB+BM=10+6=16$, (1 pont)

Tehát az e egyenes valóban **felezi az** ***ABC*** **háromszög kerületét** is. (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint.

Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, illetve $(1;-1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az ***a*** **jelű ív egyenlete: $y=(1-x)^3$, $0\le x\le1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus.**



a) Írja fel a másik három (az ábrán *b, c,* illetve *d* jelű) ív egyenletét is! **(4 pont)**

A társasjáték gyártója a 2 dm oldalú tábla fehér színű részének bevonásához egy speciális anyagot használ. Ebből 1 kg mennyiség 12 m^2 terület bevonásához elegendő.

b) Számítsa ki, hogy 4000 darab tábla elkészítéséhez hány kg speciális anyag szükséges! **(5 pont)**

A kétszemélyes társasjátékban minden játszma csak valamelyik játékos győzelmével végződhet, döntetlen nincs. Minden játszmában 1 pontot kap a győztes, a vesztes pedig 0 pontot.
Anna és Bori nagyon szereti ezt a társasjátékot, sok játszmát lejátszottak már. Ha egymás ellen játszanak, akkor Anna 0,4 valószínűséggel, Bori pedig 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Egyik alkalommal megállapodnak, hogy addig játszanak újabb játszmákat, amíg valamelyikük először éri el a 10 pontot (és így megnyeri a játékot).

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Bori legfeljebb 12 játszma után megnyeri a játékot? (Kezdéskor mindkettőjüknek 0 pontja van.)

(7 pont)

Megoldás:

a) A *b* jelű ív egyenlete: $y=(x+1)^3$, $-1\le x\le 0$.

A *c* jelű ív egyenlete: $y=-(x+1)^3$, $-1\le x\le 0$.

A *d* jelű ív egyenlete: $y=(x-1)^3$, $0\le x\le 1$. (4 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 28. feladat*

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 50. feladat*

Összesen: 16 pont

28) Az *ABCD* húrnégyszögben $AB=20$, $BC=18$, $ABC_{\sphericalangle}=70°$, $CAD_{\sphericalangle}=50°$.

a) Milyen hosszú a *CD* oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

(7 pont)

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2;0)$, $Q(6;0)$ és $R(0;5)$ pontok, a *H* pedig a *PQ* szakasz tetszőleges pontja.

b) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1,8;0)$ **(2 pont)**

c) Adja meg a *H* pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

(7 pont)

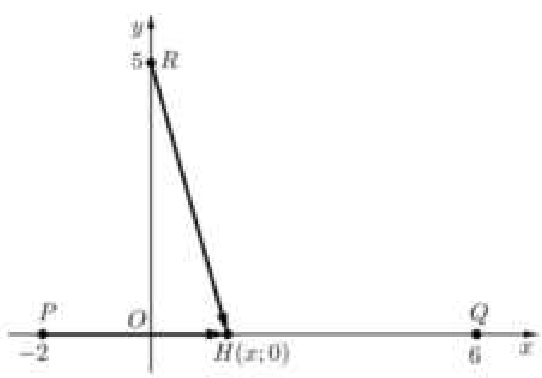
Megoldás:

a) *Lásd: Síkgeometria 38. feladat*

b) $\overrightarrow{PH}=(0,2;0)$, $\overrightarrow{RH}=(-1,8;-5)$ (1 pont)

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{RH}=0,2\cdot(-1,8)+0\cdot(-5)=\mathbf{-0,36}$ (1 pont)

c)



Legyen *H* az $(x;0)$ pont (ahol $-2\le x\le 6$). (1 pont)

Ekkor $\overrightarrow{PH}=(x;0)-(-2;0)=(x+2;0)$ és $\overrightarrow{RH}=(x;0)-(0;5)=(x;-5)$. (1 pont)

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{RH}=(x+2)x+0\cdot(-5)=x(x+2)$ (1 pont)

$x(x+2)=(x+1)^2-1$,

ezért az $f: x \mapsto x(x+2)$, $-2 \le x \le 6$ függvénynek minimuma van -1-nél.

(2 pont)

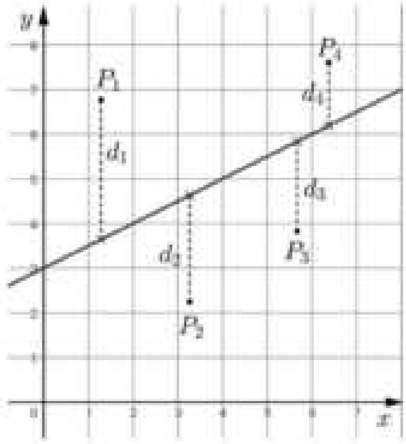
f a $[-2;-1]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[-1;6]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, $f(-2)=0$ és $f(6)=48>0$ ezért, a maximumát 6-nál veszi fel. (1 pont)

A minimális skaláris szorzat a $\boldsymbol{H_1(-1;0)}$ ponthoz tartozik, a maximális pedig a $\boldsymbol{H_2=Q(6;0)}$ ponthoz. (1 pont)

Összesen: 16 pont

29) A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.

Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)



a) Határozza meg az $R(4;2)$ és az $S(4;5)$ pontok *függőleges távolságát* az $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$ egyenestől! (3 pont)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak négyzetösszege (az ábrán látható példában $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$).

Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.

Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1;3)$, $B(3;5)$ és $C(4;4)$.

b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y=mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A, B* és *C* pontokra! $(m \in \mathbb{R})$ (6 pont)

Az $y=\dfrac{1}{3}\left(-2x^2+11x\right)$ egyenletű *g* görbe áthalad a megadott *A* és *B* pontokon, a *h* egyenes pedig az origón és a *C* ponton.

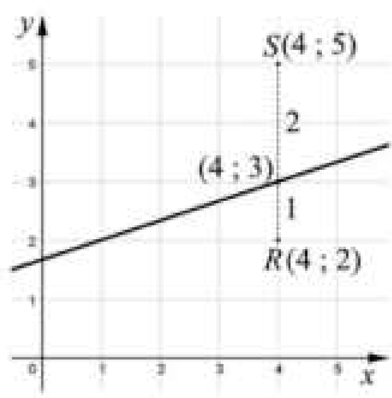
c) Mekkora a *g* és *h* által közbezárt korlátos alakzat területe? (7 pont)

Megoldás:

a) Az egyenes 4 abszcisszájú pontja $(4;3)$. (1 pont)

Az *R* függőleges távolsága $3-2=1$, (1 pont)

az *S* függőleges távolsága $5-3=2$. (1 pont)



b) Az A pontnak az $y=mx$ egyenestől mért függőleges távolsága az $(1;3)$ és az $(1;m)$ pontok távolsága. Ugyanígy a B pont függőleges távolsága a $(3;5)$ és a $(3;3m)$, a C ponté pedig a $(4;4)$ és a $(4;4m)$ pontok távolsága. Ez derüljön ki a megoldásból. (1 pont)

Tehát az alábbi összeg minimumát keressük:

$(m-3)^2+(3m-5)^2+(4m-4)^2=$ (2 pont)

$=26m^2-68m+50$. (1 pont)

Az $f(x)=ax^2+bx+c$ másodfokú f függvénynek minimuma van, ha $a>0$, és ezt a minimumot $x=-\dfrac{b}{2a}$-nál veszi fel. (1 pont)

A konkrét esetben: $f'(m)=52m-68$, ennek a zérushelyénél minimális lesz f értéke (mert f főegyütthatója pozitív).

A $26m^2-68m+50$ kifejezés tehát $52m-68=0$,

$\boldsymbol{m=\dfrac{68}{52}=\dfrac{17}{13}}$**-nál lesz minimális**.

(A keresett egyenes egyenlete $y=\dfrac{17}{13}x$.) (1 pont)

c) *Lásd: Függvények – Analízis 51. feladat*

Összesen: 16 pont